Pour tout réel q strictement positif, on considère la fonction f_q définie, pour x réel, par

$$f_q(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^q}\, dt$$

et on désigne par (C_q) la courbe représentative de f_q dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné.

I Dans cette partie, on ne cherchera pas à intégrer l'expression de $f_q(x)$.

1° Quel est l'ensemble de définition de f_q ? Étudier la parité de f_q, son sens de variation et, suivant les valeurs de q $(q > 0)$:

a. L'existence d'une limite finie de $f_q(x)$ quand x tend vers $(+\infty)$.

b. L'existence et le nombre de points d'inflexion de (C_q).

2° *a.* Pour q strictement inférieur à $\frac{3}{2}$, q étant distinct de 1, étudier la branche infinie de (C_q) quand x tend vers $(+\infty)$.

b. Déduire de tout ce qui précède l'allure (sous forme de schémas rapides) de la courbe (C_q) pour q appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, puis à $\left]1, \frac{3}{2}\right[$, enfin à $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

II Dans cette partie, $q = 1$.

1° Intégrer l'expression de $f_1(x)$.

2° Étudier avec précision les branches infinies de f_1.

3° Soit A le point d'intersection d'abscisse α, α strictement positif, de la courbe (C_1) et de l'axe $x'Ox$ (de vecteur directeur $\vec{i}$).

On veut calculer une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près : pour cela, on utilisera la méthode d'itération (c'est-à-dire des approximations successives) appliquée à la fonction : $g(x) = 2 \text{ Arc tg } x$ sur l'intervalle $\left[\sqrt{3}, 3\right]$, en posant, pour x_0 quelconque dans $\left[\sqrt{3}, 3\right]$, pour tout entier naturel n non nul : $x_n = g(x_{n-1})$. On demande :

a. d'expliquer et de justifier le principe de cette méthode, le choix de l'intervalle $\left[\sqrt{3}, 3\right]$, de démontrer que $\frac{1}{2^{n-1}}$ est un majorant de l'incertitude absolue obtenue quand on prend x_n comme valeur approchée de α, et de préciser suivant la valeur choisie pour x_0, si x_n est une valeur approchée de α par excès ou par défaut.

b. de donner une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près, en indiquant le calcul d'incertitude effectué.

4° Tracer la courbe (C_1) avec précision

(on prendra $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2$ centimètres).

III Dans cette partie, $q = \frac{3}{2}$.

1° Intégrer l'expression de $f_{\frac{3}{2}}(x)$. En déduire les équations paramétriques de $\left(C_{\frac{3}{2}}\right)$ en fonction du paramètre $\varphi = \text{Arg Sh } x$. (Arg Sh désigne la fonction réciproque du sinus hyperbolique).

2° *a.* Faire l'étude complète de la courbe (Γ) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = \text{Sh } \varphi \\ y = \varphi - 2 \text{ Th } \varphi \end{cases} \quad \text{(où } \varphi \text{ est un réel quelconque)}$$

b. Soit B le point d'intersection, d'abscisse β strictement positive, de l'axe Ox et de la courbe (Γ). En appliquant la méthode des parties proportionnelles (c'est-à-dire de Descartes), puis la méthode de Newton à la fonction : $h(\varphi) = \varphi - 2 \text{ Th } \varphi$ sur l'intervalle [3,8 , 4], donner un encadrement de φ_0 tel que :

$$\varphi_0 - 2 \text{ Th } \varphi_0 = 0$$

et en déduire un encadrement de l'abscisse β.

c. Tracer la courbe (Γ) (on précisera les points d'inflexion).

d. Calculer le rayon de courbure de (Γ) au point d'abscisse positive x_0 tel que : $\text{Ch } x_0 = \sqrt{2}$.

FIN

E.S.I. MARSEILLE
Options M et P' MATHEMATIQUES APPLIQUEES (2 h)
1977 ×157×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail